Mellinsche Transformation und Orthogonalität bei $\zeta(s, u)$; Verallgemeinerung der Riemannschen Funktionalgleichung von $\zeta(s)$.

Von MIKLÓS MIKOLÁS in Budapest.

1. Unter der Mellin-Transformierten einer Funktion $\Phi(u)$ versteht man bekanntlich

$$f(z)=\int_0^\infty u^{z-1}\Phi(u)\,du, \tag{1.1}$$

falls dieses (meistens auf die positive reelle Achse erstreckte) Integral existiert; da (1. 1) durch die Substitution $u=e^{-t}$ in die Formel

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tz}F(t)\,dt \tag{1.2}$$

mit $F(t)=\Phi(e^{-t})$ übergeht, so kann die Mellinsche Transformation auch als eine sog. zweiseitige Laplace-Transformation aufgefaßt werden.[1])

HJ. MELLIN hat in mehreren Arbeiten gezeigt, daß eine Relation vom Typus (1. 1) unter allgemeinen Voraussetzungen eine andere von der Form

$$\Phi(u)=\frac{1}{2\pi i}\int u^{-z}f(z)\,dz \tag{1.3}$$

mit einer passend gewählten vertikalen Linie $z=\alpha+iy$ $(-\infty<y<\infty)$ als Integrationsweg zur Folge hat und umgekehrt.[2])

---

[1]) Läßt man z nur auf einer Geraden $z=\alpha+iy$ (α fest) der komplexen Ebene variiren, so entsteht unter den Bezeichnungen $f(\alpha+iy)=g(y)$, $e^{-\alpha t}F(t)=G(t)$ die Formel: $g(y)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity}G(t)\,dt$. Die Fourier-Transformation ist also ein wichtiger Spezialfall von (1. 1) bzw. (1. 2). — Vgl. z. B. [1], [14].

[2]) Vgl. [8], [9], [10]; es sei für Anwendungen in der Funktionentheorie bzw. analytischen Zahlentheorie auf [1], [16] hingewiesen.

In der vorliegenden Arbeit will ich vor allem die Mellinsche Transformation auf die sogen. *Hurwitzsche Zetafunktion* $\zeta(s, u)$ $(0 < u \leqq 1)$ anwenden,[3]) was bis jetzt noch nicht geschehen zu sein erscheint.

Es zeigt sich, daß die Mellin-Transformierte

$$\mathfrak{M}(s, z) = \int_0^\infty u^{z-1} \bar{\zeta}(s, u)\, du\,^{4}) \quad \text{für} \quad \Re(s) < 1, \quad \max\{0, \Re(s)\} < \Re(z) < 1$$

sich mit Hilfe der elementaren Funktionen, der Gammafunktion und von $\zeta(s)$ in geschlossener Form auswerten läßt (Satz 1). Die entspringende Relation

$$\text{(1.4)} \qquad \mathfrak{M}(1-s, z)\, \Gamma(z) = 2(2\pi)^{-(s+z)} \Gamma(s) \cos \frac{\pi}{2}(s-z)\, \zeta(s+z)$$

setzt in Evidenz die Symmetrie-Eigenschaft $\mathfrak{M}(1-s, z) = \mathfrak{M}(1-z, s)$; da (1. 4) im Fall $\Re(s) \geqq 1$ beim Grenzübergang $z \to 0$ in die Riemannsche Funktionalgleichung von $\zeta(s)$ übergeht, so handelt es sich zugleich um eine Verallgemeinerung derselben.

Die Umkehrung des Satzes 1 gestattet nicht die Benutzung der einschlägigen, in der Literatur auffindbaren allgemeinen Transformationssätzen,[5]) weil ihre Prämissen in unserem Fall nicht erfüllt sind. Es werden immerhin die im Mellinschen Sinn „reziproken" Darstellungen für $\zeta(s, u)$ bzw. $\zeta^*(s, u) = \zeta(s, u) - u^{-s}$ abgeleitet und zwar mittels der Methoden der Residuenrechnung, unter Heranziehung mancher, teilweise tieferer Eigenschaften und Abschätzungen von $\Gamma(z)$, $\zeta(s)$, $\zeta(s, u)$ (Satz 2). Die erhaltenen Beziehungen, wie

$$\text{(1.5)} \qquad \begin{gathered} \zeta^*(1-s, u) = \frac{1}{\pi i} \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} (2\pi u)^{-z}\, \Gamma(z) \cos \frac{\pi}{2}(s-z)\, \zeta(s+z)\, dz \\ (0 < u < 1\,;\ 0 < \Re(s) < 1\,;\ 0 < \alpha < \min\{\Re(s), 1 - \Re(s)\}) \end{gathered}$$

decken einerseits neue Zusammenhänge zwischen $\zeta(s, u)$ und $\zeta(s)$ im kritischen Streifen auf; andererseits liegt es nahe, sie bei weiteren Untersuchungen über Wurzelverteilung von $\zeta(s)$ benützen zu können. (Vgl. (6. 1)—(6. 3).)

Wir beschäftigen uns auch mit der Frage, wann zwei verschiedene Werte von $\zeta(s, u)$ (als Funktionen von u) im Intervall $0 < u < 1$ zueinander *orthogonal* sind,[6]) welche — wie man sehen wird — mit der im Satz 1 betrachteten Mellin-Transformation in enger Verbindung steht. Der Antwort

---

[3]) Vgl. z. B. [16], [17].

[4]) Hier und durchwegs bezeichnet $\bar{\zeta}(s, u)$ die mit $\bar{\zeta}(s, u) = \zeta(s, u)$ $(0 < u \leqq 1)$ und $\bar{\zeta}(s, u+1) = \bar{\zeta}(s, u)$ $(u > 0)$ definierte Funktion.

[5]) Vgl. [1], S. 212, 409.

[6]) Orthogonalitätsrelationen sind in der Theorie der Zetafunktionen meines Wissens bisher nicht gefunden.

(Satz 3) enthält speziell die Orthogonalitätseigenschaften der Bernoullischen Polynome und einige Konsequenzen meiner, in anderem Zusammenhang unlängst gewonnenen Resultate.[7] — Schließlich werden noch einige Sonderfälle hervorgehoben und Bemerkungen über die Verwendungsmöglichkeiten gemacht.

2. In den folgenden bedeuten $z=x+iy$, $s=\sigma+i\tau$ und w dauernd *komplexe*, t, u und v aber *reelle* Variablen. Das Zeichen „log" ist für den (natürlichen) Hauptlogarithmus, z^w für den Hauptwert der Potenz aufgehalten. $[\xi]$ soll den ganzen, $\overline{\xi}=\xi-[\xi]$ stets den gebrochenen Teil von ξ bezeichnen. — Die auf reelle Wege bezüglichen Integrale sind im *Cauchy—Riemannschen Sinn* zu nehmen; unter dem Wert eines geradlinigen komplexen Integrals der Form $\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} H(z)\,dz$ versteht man, wie üblich, den Grenzwert des Integrals von $\alpha-iY_1$ zu $\alpha+iY_2$ für $Y_1, Y_2\to\infty$.[8]

Wir wollen zunächst $\zeta(s, u)$ als eine Funktion von u untersuchen.

L e m m a. *$\zeta(s, u)$ ist für ein beliebiges festes $s\neq 1$ eine im Intervall $0<u\leqq 1$ stetige Funktion. Was die Nähe des Punktes $u=0$ betrifft, so sind drei Fälle zu unterscheiden:* 1) *für $\sigma<0$ gilt* $\lim\limits_{u\to+0}\zeta(s, u)=\zeta(s)$; 2) *ist $\sigma=0$, so bleibt $\zeta(s, u)$ bei $u\to+0$ beschränkt;* 3) *für $\sigma>0$, $s\neq 1$ hat man* $\lim\limits_{u\to+0} u^s\zeta(s, u)=1$.

B e w e i s. Die Darstellung[9]

$$(2.1)\qquad \zeta(s, u)=\sum_{n=0}^{N}(u+n)^{-s}+\frac{1}{s-1}(u+N)^{1-s}-s\int_{N}^{\infty}\overline{t}(u+t)^{-s-1}\,dt$$

$(\sigma>0, s\neq 1\,;\ N=0, 1, 2,\ldots)$ läßt sich mit $N=1$ in der Form schreiben;

$$(2.2)\qquad \zeta(s, u)=u^{-s}+(u+1)^{-s}+\frac{1}{s-1}(u+1)^{1-s}-s\int_{1}^{\infty}\overline{t}(t+u)^{-s-1}dt$$

$(\sigma>0, s\neq 1)$, denn es ist

$$\int_{0}^{1}\overline{t}(t+u)^{-s-1}\,dt=\frac{1}{1-s}\left\{(u+1)^{1-s}-u^{1-s}\right\}+\frac{u}{s}\left\{(u+1)^{-s}-u^{-s}\right\}.$$

---

7) Vgl. [11].

8) Wir beschränken uns also nicht nur auf den Cauchyschen Hauptwert $\lim\limits_{Y\to\infty}\int\limits_{\alpha-iY}^{\alpha+iY}$.

9) Vgl. [5], S. 9—10.

Eine partielle Integration ergibt ferner

$$-(s+1)\int_k^{k+1}\bar{t}(1-\bar{t})(t+u)^{-s-2}\,dt=\int_k^{k+1}\frac{d(t+u)^{-(s+1)}}{dt}(t-k)(1+k-t)\,dt=$$

$$(2.3)\qquad =-\int_k^{k+1}(t+u)^{-s-1}(2k+1-t)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{s}\left\{(u+k)^{-s}-(u+k+1)^{-s}\right\}+2\int_k^{k+1}\bar{t}(t+u)^{-s-1}dt\qquad (k=1,2,\ldots),$$

so daß man aus (2.2) die schärfere Formel

$$(2.4)\qquad \zeta(s,u)=u^{-s}+\frac{1}{2}(u+1)^{-s}+\frac{1}{s-1}(u+1)^{1-s}+\frac{s(s+1)}{2}\int_1^{\infty}\bar{t}(1-\bar{t})(t+u)^{-s-2}\,dt$$

erhalten kann. Weil das Restglied wegen $|\bar{t}(1-\bar{t})(t+u)^{-s-2}|\leqq\frac{1}{4}t^{-\sigma-2}$ in jedem endlichen Gebiet der s-Ebene mit $\sigma>-1$ gleichmäßig existiert, ist die rechte Seite von (2.4) eine für $\sigma>-1, s\neq 1$ reguläre Funktion von s und sie liefert die analytische Fortsetzung von $\zeta(s,u)$ bis zur Geraden $\sigma=-1$. (2.4) gilt somit für $\sigma>-1$, bis auf $s=1$.

Wir brauchen noch die folgende Formel von HURWITZ:[10])

$$(2.5)\qquad \zeta(s,u)=\frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\left(\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2m\pi u}{m^{1-s}}+\cos\frac{\pi s}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2m\pi u}{m^{1-s}}\right).$$
$$(\sigma<0);$$

(2.5), (2.2) und (2.4) setzen die erste Behauptung über Stetigkeit von $\zeta(s,u)$ $(0<u\leqq 1)$ in Evidenz, wenn man beachtet, daß die Reihen $\sum m^{s-1}\cos 2m\pi u$, $\sum m^{s-1}\sin 2m\pi u$ und die Integrale in (2.2), (2.4) bezüglich u gleichmäßig konvergieren, je nachdem der Fall $\sigma<0$, bzw. $\sigma>0$ oder $\sigma=0$ vorliegt. — Es bleibt der Endpunkt $u=0$ übrig.

1. Ist s fest und $\sigma<0$, so läßt sich die rechte Seite von (2.5) durch die konvergente numerische Reihe

$$2|\Gamma(1-s)|(2\pi)^{\sigma-1}\left(\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|+\left|\cos\frac{\pi s}{2}\right|\right)\sum_{m=1}^{\infty}m^{\sigma-1}$$

majorieren, woher nach WEIERSTRASS die gleichmäßige Konvergenz der

[10]) Vgl. [6], S. 107; [17], S. 269.

betreffenden Funktionenreihe und die Stetigkeit ihrer Summe für $-\infty < u < \infty$ folgt. Man findet sogar gleich

(2. 6) $$\lim_{u\to+0} \zeta(s, u) = \lim_{u\to 1-0} \zeta(s, u) = \zeta(s, 1) = \zeta(s).$$

2. Für $s = 0$ liefert (2. 4) unmittelbar

(2. 7) $$\lim_{u\to+0} \zeta(0, u) = \lim_{u\to+0} \left(\frac{1}{2} - u\right) = \frac{1}{2}.$$

Wenn aber $\sigma = 0$, $s \neq 0$, d. h. $s = i\tau$ ($\tau \neq 0$) ist, so gelangt man aus (2. 4) wegen

$$\left|\int_1^\infty \bar{t}(1-\bar{t})(t+u)^{-i\tau-2}\, dt\right| < \frac{1}{4}\int_1^\infty (t+u)^{-2}\, dt \leqq \frac{1}{4}$$

zur Abschätzung

(2. 8) $$|\zeta(i\tau, u)| < \frac{3}{2} + 2(\tau^2+1)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}|\tau|\,(\tau^2+1)^{\frac{1}{2}} \qquad (0 < u \leqq 1).$$

3. Schließlich, im Fall eines (festen) $s \neq 1$ mit $\sigma > 0$ hat man nur die Ungleichungen

(2. 9) $$\left|\int_1^\infty \bar{t}(t+u)^{-s-1}\, dt\right| < \int_1^\infty (t+u)^{-\sigma-1}\, dt < \frac{1}{\sigma(u+1)^\sigma} < \frac{1}{\sigma} \qquad (u \geqq 0)$$

zu berücksichtigen, um aus (2. 2) die Limesrelation

(2. 10) $$\lim_{u\to+0} u^s \zeta(s, u) = 1$$

zu entnehmen.

3. Es sei die Mellin-Transformierte

(3. 1) $$\mathfrak{M}(s, z) = \int_0^\infty u^{z-1}\bar{\zeta}(s, u)\, du$$

betrachtet. Wir behaupten den folgenden

Satz 1. *$\mathfrak{M}(s, z)$ ist für $\sigma < 1$, $\max\{0, \sigma\} < x < 1$ vorhanden, aber nicht absolut konvergent; in diesem Fall gilt die Darstellung*

(3. 2) $$\mathfrak{M}(s, z) = 2(2\pi)^{s-z-1}\, \Gamma(z)\, \Gamma(1-s)\, \sin\frac{\pi}{2}(s+z)\, \zeta(z-s+1),$$

welche sich auch in der Form

(3. 3) $$\mathfrak{M}(1-s, z)/\Gamma(z) = 2(2\pi)^{-(s+z)}\, \Gamma(s) \cos\frac{\pi}{2}(s-z)\, \zeta(s+z)$$

($\sigma > 0$, $\max\{0, 1-\sigma\} < x < 1$) *schreiben läßt.*

Man hat die Limesgleichung

$$\lim_{z\to 0} \mathfrak{M}(1-s, z)\, \Gamma(z) = \zeta(1-s) \qquad (\sigma \geqq 1) \tag{3.4}$$

und die Symmetrie-Relation

$$\mathfrak{M}(1-s, z) = \mathfrak{M}(1-z, s) \quad (0 < \sigma < 1, 0 < x < 1, \sigma + x < 1); \tag{3.5}$$

auf Grund von (3. 2) *mag* (3. 3) *als eine Verallgemeinerung der Riemannschen Funktionalgleichung* $\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\cdot\zeta(s)$ $(s \neq 1, 0, -1, -2, \ldots)$ *angesehen werden.*

Beweis. 1° Zuerst setzen wir fest, daß (2. 5) nebst $0 < u < 1$ auch für $0 \leqq \sigma < 1$ gültig bleibt.

Denn die in (2. 5) vorkommenden trigonometrischen Reihen konvergieren für $s < 1, 0 < u < 1$ laut eines bekannten Konvergenzkriteriums von DIRICHLET [11]) und sogar gleichmäßig in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq u \leqq 1-\varepsilon$; faßt man sie als gewöhnliche Dirichletsche Reihen auf, so folgt ihre Konvergenz in der Halbebene $\sigma < 1$, ferner die dortige Regularität ihrer Summen als Funktionen von s. Da alle singulären Stellen von $\Gamma(1-s)$ an $s = 1, 2, 3, \ldots$ liegen, sind beide Seiten von (2. 5) analytisch für $\sigma < 1$, so daß sie für die betreffenden Werte von s identisch sein müssen.

Es gilt also für die nach 1 periodische Funktion $\bar{\zeta}(s, u) = \zeta(s, \bar{u})$ die Darstellung

$$\bar{\zeta}(s, u) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\left(\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{m=1}^{\infty} m^{s-1}\cos 2m\pi u + \right. \tag{3.6}$$

$$\left. + \cos\frac{\pi s}{2}\sum_{m=1}^{\infty} m^{s-1}\sin 2m\pi u\right) \qquad (\sigma < 1;\, u > 0,\, u \neq 1, 2, \ldots).$$

2° Es sei $\sigma < 1$, $0 < x < 1$, und $x > \sigma$; wir betrachten das Integral $\int_0^A u^{z-1}\bar{\zeta}(s, u)\, du$ $(A > 0$, beliebig).

Der Integrand ist auf Grund des vorangehenden Lemmas eine stetige Funktion von u in $(0, \infty)$, abgesehen von den Punkten $u = 1, 2, \ldots$, wobei nur die linksseitige Stetigkeit von $\bar{\zeta}(s, u)$ gesichert ist. Es kann ferner, den Fällen 1)—3) des Lemmas entsprechend, eine Zahl $\delta > 0$ derart bestimmt werden, daß die Abschätzungen

$$|u^{z-1}\bar{\zeta}(s, u)| \leqq \begin{cases} Cu^{x-1} & (0 < u \leqq \delta) \\ C & (\nu < u \leqq \nu + \delta;\ \nu = 1, 2, \ldots) \end{cases} \qquad (\sigma \geqq 0) \tag{3.7}$$

[11]) Vgl. z. B. [2], S. 32, oder [13], S. 18.

bzw.

$$
|u^{z-1}\,\overline{\zeta}(s,u)| \leqq \begin{cases} C\,u^{x-\sigma-1} & (0<u\leqq\delta) \\ C\,(u-\nu)^{-\sigma} & (\nu<u\leqq\nu+\delta;\ \nu=1,2,\ldots) \end{cases} \quad (0<\sigma<1) \tag{3.8}
$$

gültig sind, wobei C eine geeignete Konstante bezeichnet.

Hieraus ersieht man, daß unsere Bedingungen für s und z jedenfalls die (absolute) Integrabilität von $u^{z-1}\,\overline{\zeta}(s,u)$ in der Nähe der etwaigen Unendlichkeitsstellen und somit im ganzen Intervall $0 \leqq u \leqq A$ nach sich ziehen. Multipliziert man nun (3.6) mit u^{z-1}, so muß die rechte Seite (nach klassischen Sätzen der Theorie der trigonometrischen Reihen) die zu $0<u<1$ gehörige (gewöhnliche) Fourierentwicklung von $u^{z-1}\,\overline{\zeta}(s,u)$ sein, welche man bekanntlich gliedweise integrieren darf. [12]) Infolgedessen bekommen wir auf Grund bekannter Integralformeln in der Theorie der Gammafunktion [13])

$$
\begin{aligned}
\int_0^A u^{z-1}\,\overline{\zeta}(s,u)\,du &= 2(2\pi)^{s-1}\,\Gamma(1-s)\sum_{m=1}^{\infty} m^{s-1}\Big(\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^A u^{z-1}\cos 2m\pi u\,du + \\
&+\cos\frac{\pi s}{2}\int_0^A u^{z-1}\sin 2m\pi u\,du\Big) = 2(2\pi)^{s-z-1}\,\Gamma(1-s)\,\Gamma(z)\sin\frac{\pi}{2}(s+z)\sum_{m=1}^{\infty} m^{s-z-1} + \\
&+2(2\pi)^{s-1}\,\Gamma(1-s)\sum_{m=1}^{\infty} m^{s-1}\Big(\sin\frac{\pi s}{2}\int_A^{\infty} u^{z-1}\cos 2m\pi u\,du + \\
&+\cos\frac{\pi s}{2}\int_A^{\infty} u^{z-1}\sin 2m\pi u\,du\Big);
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

die Konvergenz der ersten Reihe und von $\sum m^{s-z-1} = \zeta(z-s+1)$ impliziert offenbar die Existenz der letzten Summe.

3° Fassen wir die hier auftretenden Integrale ins Auge! Eine Teilintegration liefert $(x<1)$

$$
\int_A^{\infty} u^{z-1}\cos 2m\pi u\,du = \frac{1}{2m\pi}\left\{-A^{z-1}\sin 2m\pi A + (1-z)\int_A^{\infty} u^{z-2}\sin 2m\pi u\,du\right\},
$$

woher man sofort die Ungleichung

$$
\left|\int_A^{\infty} u^{z-1}\cos 2m\pi u\,du\right| < \frac{1}{2m\pi}A^{x-1} + \frac{1}{m\pi}\int_A^{\infty} u^{x-2}\,du = \frac{A^{x-1}}{\pi m}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1-x}\right)
$$

[12]) Vgl. z. B. [2], S. 89—91, bzw. S. 31.

[13]) Vgl. z. B. [7], S. 79; hierbei wird die Bezeichnung $z! = \Gamma(z+1)$ benutzt.

$(m=1,2,\ldots)$ erhält. Ähnlicherweise entsteht

$$\left|\int_A^\infty u^{z-1}\sin 2m\pi u\,du\right| < \frac{A^{x-1}}{\pi m}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1-x}\right) \qquad (m=1,2,\ldots).$$

Die Summe der zweiten Reihe in (3.9) bleibt also absolut unter der oberen Schranke $\frac{\zeta(2-\sigma)}{\pi}\left(\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|+\left|\cos\frac{\pi s}{2}\right|\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1-x}\right)A^{x-1}$; da der letzte Faktor für $A\to\infty$ gegen Null strebt, so erhält man für $A\to\infty$:

$$(3.10)\quad \sum_{m=1}^{\infty} m^{s-1}\left(\sin\frac{\pi s}{2}\int_A^\infty u^{z-1}\cos 2m\pi u\,du+\cos\frac{\pi s}{2}\int_A^\infty u^{z-1}\sin 2m\pi u\,du\right)\to 0,$$

wofern nur s und z fest und den oben gestellten Bedingungen unterworfen sind. (3.9) und (3.10) hat aber die Existenz von $\int_0^\infty u^{z-1}\bar{\zeta}(s,u)\,du$ und die Relation (3.2) zur Folge.

4° Um die Divergenz von $\int_0^\infty |u^{z-1}\bar{\zeta}(s,u)|\,du$ $(\sigma<1,\ \max\{0,\sigma\}<x<1)$ zu ermitteln, bemerken wir, daß die Integrale

$$\int_\nu^{\nu+1}|\bar{\zeta}(s,u)|\,du=\int_0^1|\zeta(s,u)|\,du \qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

auf Grund des Lemmas vorhanden und positiv sind, ferner, daß u^{x-1} in unserem Fall für $0<u<\infty$ streng monoton abnimmt.

Daher ist für $N=1,2,\ldots$

$$\int_0^N u^{x-1}|\bar{\zeta}(s,u)|\,du > N^{x-1}\int_0^N|\bar{\zeta}(s,u)|\,du = N^x\int_0^1|\zeta(s,u)|\,du$$

und das letzte Produkt wächst mit N über alle Grenzen.

5° Schreibt man $1-s$ statt s, so wandelt sich (3.2) in

$$(3.11)\qquad \mathfrak{M}(1-s,z)=2(2\pi)^{-(s+z)}\Gamma(s)\,\Gamma(z)\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\,\zeta(s+z)$$

$$(\sigma>0,\ \max\{0,1-\sigma\}<x<1)$$

um; daraus geht einerseits die Symmetrie-Relation (3.5), andererseits im Fall $\sigma\geqq 1,\ 0<x<1$ die Formel (3.4) unmittelbar hervor.

4. Unser nächstes Ziel ist die Mellinsche Umkehrung von (3.3) mit funktionentheoretischen Mitteln. Dies leistet

Satz 2. *$\zeta(s,u)$ ist nebst $\sigma<1$ und $0<u<1$ mittels der Gammafunktion und der Riemannschen Zetafunktion folgendermaßen ausdrückbar:*

$$\zeta(1-s,u)=\frac{1}{\pi i}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}(2\pi u)^{-z}\Gamma(z)\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\zeta(s+z)dz \tag{4.1}$$

$$\left(\sigma>\frac{1}{2},\ s\neq 1,2,\ldots;\ \max\{0,1-\sigma\}<\alpha<\frac{1}{2}\right),$$

ferner

$$\zeta(1-s,u)=u^{s-1}+\frac{1}{\pi i}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}(2\pi u)^{-z}\Gamma(z)\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\zeta(s+z)dz \tag{4.2}$$

$$(0<\sigma<1;\ 0<\alpha<\min\{\sigma,1-\sigma\}).$$

Beweis. Es sei stets $0<u<1$, $\alpha>0$, $\alpha\neq 1-\sigma$ angenommen; wir beschränken uns überall auf die *nicht-ganzen* Werte von s, falls nicht eine andere Festsetzung getroffen wird.

1° Der Integrand ist ersichtlich für alle Werte von s und z regulär, abgesehen von den durch die meromorphen Funktionen $\Gamma(z)$ und $\zeta(s+z)$ gelieferten singulären Stellen. Wir betrachten nebst festen s und u die Summe der Residuen von $u^{-z}\mathfrak{F}(s,z)=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cdot(2\pi u)^{-z}\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\Gamma(z)\zeta(s+z)$, erstreckt über die von $x=\alpha$ links liegenden Pole und benutzen für diese Summe die Cauchysche Bezeichnung:[14])

$$\mathop{\mathcal{E}}_{x<\alpha} u^{-z}\mathfrak{F}(s,z)=\mathop{\mathcal{E}}_{x<\alpha} 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)(2\pi u)^{-z}\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\,[\Gamma(z)\zeta(s+z)].$$

Mit Rücksicht auf die Einfachheit der fraglichen Pole erhält man

$$\begin{aligned}\operatorname*{res}_{z=-k} u^{-z}\mathfrak{F}(s,z)&=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)(2\pi u)^{k}\cos\frac{\pi}{2}(s+k)\zeta(s-k)\frac{(-1)^k}{k!}=\\&=\Gamma(s)\frac{\zeta(1-s+k)}{k!\,\Gamma(s-k)}u^k=\frac{(s-1)(s-2)\cdots(s-k)}{k!}\zeta(1-s+k)u^k\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$(k=0,1,2,\ldots),$$

gleichwie

$$\begin{aligned}\operatorname*{res}_{z=1-s} u^{-z}\mathfrak{F}(s,z)&=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)(2\pi u)^{s-1}\cos\frac{\pi}{2}(2s-1)\Gamma(1-s)=\\&=\frac{1}{\pi}u^{s-1}\Gamma(s)\Gamma(1-s)\sin\pi s=u^{s-1}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

---

[14]) $\mathcal{E}_l\,\varphi(z)[\psi(z)]$ bezeichnet bekanntlich allgemein die Residuensumme von $\varphi(z)\cdot\psi(z)$, bezüglich auf die innerhalb der geschlossenen Kurve l gelegenen singulären Stellen von $\psi(z)$. — Vgl. z. B. [6], S. 15, 30; [12], S. 84.

Die Untersuchung der somit auftretenden Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(s-1)(s-2)\cdots(s-k)}{k!}\zeta(1-s+k)u^k$$

erfordert keine Mühe. Denn man gewinnt zunächst für $\sigma>1$, durch Verwendung der Binomialreihe und des Doppelreihensatzes von WEIERSTRASS[15])

$$(4.5)\qquad \begin{aligned}\zeta(s,u)-u^{-s}&=\sum_{m=1}^{\infty}m^{-s}\left(1+\frac{u}{m}\right)^{-s}=\\ &=\sum_{m=1}^{\infty}m^{-s}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-s}{k}\left(\frac{u}{m}\right)^k=\zeta(s)+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{-s}{k}\zeta(s+k)u^k.\end{aligned}$$

Die letzte Reihe konvergiert für jedes feste u in einem beliebigen endlichen Bereich $\mathfrak{B}$ der s-Ebene gleichmäßig, wie man auf Grund der für hinreichend große k gültigen Abschätzung $\left|\binom{-s}{k}\zeta(s+k)u^k\right|\sim\left|\frac{k^{s-1}}{\Gamma(s)}\right|u^k<2\max\limits_{(\mathfrak{B})}\left|\frac{1}{\Gamma(s)}\right|u^k$ und des Weierstraßschen Kriteriums sofort einsieht; daraus folgt aber, daß die betreffende Summe eine ganze Funktion von s ist. Da (4.5) infolgedessen beiderseits bis auf $s=1$ analytische Funktionen erhält, so muß es allgemein

$$(4.6)\qquad \zeta(s,u)-u^{-s}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-s}{k}\zeta(s+k)u^k \qquad (s\neq 1)$$

bestehen.[16])

Unter Beachtung von (4.3), (4.4), (4.6) ergibt sich

$$(4.7)\qquad \underset{z=\alpha}{\mathfrak{S}}\, u^{-z}\mathfrak{F}(s,z)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{s-1}{k}\zeta(1-s+k)u^k=\zeta(1-s,u)-u^{s-1}, & \text{wenn } \alpha<1-\sigma \text{ ist,}\\ \zeta(1-s,u) \text{ im Fall } \alpha>1-\sigma.\end{cases}$$

2° Wir betrachten nun ein Viereck in der z-Ebene mit den Eckpunkten $\alpha-iY_1$, $\alpha+iY_2$, $-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iY_2$, $-\left(N+\frac{1}{2}\right)-iY_1$ ($Y_1>0$, $Y_2>0$, N eine positive ganze Zahl), umlaufen in positivem Sinn. Vermöge des Residuensatzes kann man schreiben (vgl. (4.3), (4.4))

$$(4.8)\qquad \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\alpha-iY_1}^{\alpha+iY_2}+\int\limits_{\alpha+iY_2}^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iY_2}+\int\limits_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iY_2}^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)-iY_1}+\int\limits_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)-iY_1}^{\alpha-iY_1}\right)u^{-z}\mathfrak{M}(1-s,z)dz=$$

---

15) S. z. B. [3], S. 440 und 444—445.

16) Es ist hierbei, wie üblich, unter $[(s+k-1)\zeta(s+k)]_{s=1-k}$ der entsprechende Grenzwert (d. h. 1) zu verstehen.

$$(4.8)\qquad = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N} \binom{s-1}{k} \zeta(1-s+k)u^k, & \text{falls } \alpha < 1-\sigma \text{ ist,} \\ u^{s-1} + \sum_{k=0}^{N} \binom{s-1}{k} \zeta(1-s+k)u^k, & \text{wenn } \alpha > 1-\sigma \text{ ist und} \end{cases}$$

Y_1, Y_2, N genügend groß gewählt werden.[17]

Hierbei ist der Integrand (der Kürze halber) nur einmal dargestellt und jeder Integrationsweg (wie in den folgenden stets) geradlinig gemeint.

Unsere Aufgabe steht offenbar darin, die einzelnen Teilintegrale für feste s und u hinreichend scharf abzuschätzen und dann $Y_1 \to \infty$, $Y_2 \to \infty$, $N \to \infty$ streben zu lassen.

3° Wir beginnen mit dem dritten Glied unter (4.8); es ist

$$(4.9)\qquad \int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)-iY_1}^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iY_2} u^{-z} \mathfrak{Z}(s, z)\,dz = i \int_{-Y_1}^{Y_2} u^{N+\frac{1}{2}-iy} \mathfrak{Z}\left(s, -N-\frac{1}{2}+iy\right) dy.$$

Man verifiziert leicht mittels der Funktionalgleichung von $\zeta(s)$:

$$(4.10)\qquad \mathfrak{Z}(s, z) = \frac{1}{2\pi} \Gamma(s)\Gamma(z)\Gamma(1-s-z)(\sin \pi z + \sin \pi s)\zeta(1-s-z),$$

und als ein Korollarium der Stirlingschen Formel:

$$(4.11)\qquad \Gamma(z_0+n+1) \sim n!\, n^{z_0} \qquad (z_0 \text{ fest, } n \to \infty).$$

Da man die Wertbestimmung

$$(4.12)\qquad \Gamma\left(-N-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-2)^{N+1}\pi^{\frac{1}{2}}}{1\cdot 3 \cdots (2N+1)}$$

hat, so gilt von einer Zahl $N = N_0$ an

$$(4.13)\qquad \begin{aligned} &\left|\Gamma\left(-N-\frac{1}{2}+iy\right)\right| \left|\Gamma\left(1-s+N+\frac{1}{2}-iy\right)\right| \leqq \\ &\leqq \left|\Gamma\left(-N-\frac{1}{2}\right)\right| \left|\Gamma\left(1-\sigma+N+\frac{1}{2}\right)\right| < \\ &< 2(N!)^{-1}\pi^{\frac{1}{2}} \cdot 2N!\, N^{\frac{1}{2}-\sigma} = 4\pi^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}-\sigma} \qquad (-Y_1 \leqq y \leqq Y_2); \end{aligned}$$

besteht zugleich $N > \sigma$, so ist gewiß

$$(4.14)\qquad \left|\zeta\left(1-s+N+\frac{1}{2}-iy\right)\right| \leqq \zeta\left(N+\frac{3}{2}-\sigma\right) < \zeta\left(\frac{3}{2}\right).$$

---

[17]) D. h. so groß, daß $1-s$ innerhalb unseres Vierecks liegt. Das ist etwa bei $Y_1 > |\tau|$, $Y_2 > |\tau|$, $N > \sigma$ gewiß der Fall.

Es folgt noch unmittelbar

$$(4.15)\qquad \begin{aligned}&\left|\sin\pi\left(-N-\frac{1}{2}+iy\right)\right|=\left|-\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi\cdot\operatorname{ch}\pi y+\right.\\&\left.+i\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi\cdot\operatorname{sh}\pi y\right|\leqq\operatorname{ch}\pi y+|\operatorname{sh}\pi y|\leqq e^{\pi|y|}\qquad(-Y_1\leqq y\leqq Y_2).\end{aligned}$$

Alles dies ermöglicht die Abschätzung

$$(4.16)\qquad \begin{aligned}&\left|\int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)-iY_1}^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iY_2} u^{-z}\mathfrak{F}(s,z)\,dz\right|<\\&<2\pi^{-\frac{1}{2}}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)|\Gamma(s)|u^{N+\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}-\sigma}\int_{-Y_1}^{Y_2}(e^{\pi|y|}+|\sin\pi s|)\,dy\qquad(N>\max\{N_0,\sigma\}).\end{aligned}$$

Bei *fest gehaltenen* Y_1 und Y_2 wird die letzte Schranke für $N\to\infty$ beliebig klein, weil dann $u^{N+\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}-\sigma}$ gegen Null strebt.

4° Von nun an bezeichnen wir (zur Abkürzung) mit $c_1, c_2, \ldots; K_1, K_2, \ldots$ positive Konstanten, welche unter Umständen von s und u abhängen können, aber von Y und N jedenfalls *unabhängig* sind.

Es ist zweckmäßig, das Integral

$$(4.17)\qquad \int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iY}^{\alpha+iY} u^{-z}\mathfrak{F}(s,z)\,dz=\int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)}^{\alpha} u^{-x-iY}\mathfrak{F}(s,x+iY)\,dx$$

$\left(Y\neq 0 \text{ beliebig reell, } N\geqq\sigma+\frac{1}{2}\right)$, welche vom Typus des zweiten und vierten Gliedes unter (4.8) ist, folgenderweise zu zerlegen: $\int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)}^{-(\sigma+1)}+\int_{-(\sigma+1)}^{-\sigma}+\int_{-\sigma}^{\alpha}$.

Erstens schreiben wir (vgl. (4.10))

$$(4.18)\qquad \begin{aligned}&\int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)}^{-(\sigma+1)} u^{-x-iY}\mathfrak{F}(s,x+iY)\,dx=\\&=\frac{1}{2}\Gamma(s)\int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)}^{-(\sigma+1)}\left[u^{-z}\frac{\Gamma(1-s-z)}{\Gamma(1-z)}\left(1+\frac{\sin\pi s}{\sin\pi z}\right)\zeta(1-s-z)\right]_{z=x+iY}dx.\end{aligned}$$

Hierbei gilt wegen[18]) $\Gamma(w+w_0)\sim\Gamma(w)w^{w_0}$ (w_0 beliebig fest, $|w|\to\infty$)

$$\left|\frac{\Gamma(1-s-z)}{\Gamma(1-z)}\right|_{z=x+iY}\sim|(1-x-iY)^{-s}| \qquad (Y \text{ fest}, \ x\to-\infty),$$

also nebst $\sigma>0$ gewiß

$$(4.19)\qquad \left|\frac{\Gamma(1-s-z)}{\Gamma(1-z)}\right|_{z=x+iY}<c_1|1-x-iY|^{-\sigma}<c_1|Y|^{-\sigma} \quad (-\infty<x\leqq-\sigma-1).$$

Da allgemein $|\sin(\xi+i\eta)|^2=\sin^2\xi+\mathrm{sh}^2\eta$ (ξ,η beliebig reell), also $\mathrm{sh}^2\eta\leqq|\sin(\xi+i\eta)|^2\leqq 1+\mathrm{sh}^2\eta=\mathrm{ch}^2\eta$ besteht, gelangt man zur Abschätzung

$$(4.20)\qquad \left|1+\frac{\sin\pi s}{\sin\pi z}\right|_{z=x+iY}\leqq 1+\frac{|\sin\pi(\sigma+i\tau)|}{|\sin\pi(x+iY)|}\leqq 1+\frac{\mathrm{ch}\,\pi\tau}{|\mathrm{sh}\,\pi Y|}$$
$$(-\infty<x<\infty).$$

Ferner, hinsichtlich $1-\sigma-x\geqq 2$

$$(4.21)\qquad |\zeta(1-s-z)|_{z=x+iY}\leqq\zeta(2)<2 \qquad (-\infty<x\leqq-\sigma-1),$$

so daß (4.18), (4.19), (4.20), (4.21) die Ungleichungen

$$(4.22)\qquad \left|\int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)}^{-(\sigma+1)} u^{-x-iY}\mathfrak{F}(s,x+iY)\,dx\right|<$$
$$<c_2|Y|^{-\sigma}\left(1+\frac{\mathrm{ch}\,\pi\tau}{|\mathrm{sh}\,\pi Y|}\right)\int_{-\infty}^{-(\sigma+1)}u^{-x}dx<c_3|Y|^{-\sigma} \qquad (|Y|>K_1;\ N=1,2,\dots)$$

liefern.

Bei dem zweiten und dritten Teilintegral in Betracht untersuchen wir den Integrand in der Form

$$u^{-x-iY}\mathfrak{F}(s,x+iY)=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\left[(2\pi u)^{-z}\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\Gamma(z)\zeta(s+z)\right]_{z=x+iY}.$$

Man hat

$$(4.23)\qquad \left|\cos\frac{\pi}{2}(\sigma-x+i(\tau-Y))\right|\leqq\mathrm{ch}\frac{\pi}{2}(\tau-Y)+\left|\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}(\tau-Y)\right|\leqq e^{\frac{\pi}{2}(|\tau|+|Y|)}$$
$$(-\infty<x<\infty)$$

und, vermöge der Formel von Pincherle—Mellin[19])

$$(4.24)\qquad |\Gamma(x+iy)|<(\sqrt{2\pi}+\delta)|Y|^{x-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|Y|}$$
$$(\delta>0 \text{ fest}, \ -\sigma-1\leqq x\leqq a, \ |Y|>K_2>0).$$

---

[18]) Vgl. [7], S. 30—31.

[19]) Vgl. [10]. S. 308—309, oder [7], S. 14—15.

Kombinieren wir die für festes σ und $|\tau|\to\infty$ bestehenden Abschätzungen $|\zeta(s)|=O(1)\cdot|\tau|^{\frac{1}{2}-\sigma}|\zeta(1-s)|$ (σ beliebig), $\zeta(s)=O(|\tau|^{\frac{1}{2}(1-\sigma)}\log|\tau|)$ $(0\leqq\sigma\leqq 1)$, von welchen die erste in einem beliebigen Streifen $\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2$, die zweite in jedem solchen mit $0\leqq\sigma_1<\sigma_2\leqq 1$ auch *gleichmäßig* gilt; somit ergibt sich unter Benutzung des Satzes von LINDELÖF:[20])

$$(4.25)\qquad |\zeta(s+z)|<\begin{cases} c_4|Y|^{\frac{1}{2}-(\sigma+x)}\log|Y| \text{ mit } -\sigma-1\leqq x\leqq-\sigma,\ |Y|>K_3,\\ c_5|Y|^{\frac{1}{2}(1-\sigma-x)}\log|Y| \text{ nebst } -\sigma\leqq x\leqq 1-\sigma,\ |Y|>K_4,\\ c_6\log|Y| \text{ für } 1-\sigma\leqq x\leqq 1+\delta,\ \delta>0 \text{ fest},\ |Y|>K_5.\end{cases}$$

Es folgt also

$$(4.26)\qquad \left|\int\limits_{-(\sigma+1)}^{-\sigma} u^{-x-iY}\mathfrak{F}(s,x+iY)\,dx\right|<c_7|Y|^{-\sigma}\log|Y| \qquad (|Y|>K_5).$$

Was den Fall des Intervalls $(-\sigma,\alpha)$ betrifft, so sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden. Wenn dies einen Teil von $(-\sigma, 1-\sigma)$ bildet, d. h. $\alpha<1-\sigma$ besteht, so erhält man (vgl. (4.23)—(4.25))

$$(4.27)\qquad \left|\int\limits_{-\sigma}^{\alpha} u^{-x-iY}\mathfrak{F}(s,x+iY)\,dx\right|<c_8\int\limits_{-\sigma}^{\alpha}(2\pi u)^{-x}|Y|^{\frac{1}{2}(x-\sigma)}\log|Y|\,dx=$$
$$=c_9\left(|Y|^{\frac{1}{2}(\alpha-\sigma)}-|Y|^{-\sigma}\right) \qquad (|Y|>K_6).$$

Widrigenfalls $(\alpha>1-\sigma)$ hat man in (4.27) $1-\sigma$ statt α zu setzen und es entsteht für den Rest (vgl. (4.23)—(4.25))

$$(4.28)\qquad \left|\int\limits_{1-\sigma}^{\alpha} u^{-x-iY}\mathfrak{F}(s,x+iY)\,dx\right|<c_{10}\int\limits_{1-\sigma}^{\alpha}|Y|^{x-\frac{1}{2}}\log|Y|\,dx=$$
$$=c_{10}\left(|Y|^{\alpha-\frac{1}{2}}-|Y|^{\frac{1}{2}-\sigma}\right) \quad (|Y|<K_7)$$

(4.17), (4.22), (4.26), (4.28) ergeben zusammen

$$(4.29)\quad \left|\int\limits_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iY}^{\alpha+iY} u^{-z}\mathfrak{F}(s,z)\,dz\right|<\begin{cases} c_{11}|Y|^{-\sigma}\log|Y|+c_9|Y|^{\frac{1}{2}(\alpha-\sigma)} & (|Y|>K_8),\\ c_{11}|Y|^{-\sigma}\log|Y|+c_{12}|Y|^{\frac{1}{2}}+c_{10}|Y|^{\alpha-\frac{1}{2}} & (|Y|>K_9),\end{cases}$$

je nachdem $\sigma>0$ und $0<\alpha<1-\sigma$ bzw. $\sigma>0$ und $\alpha>0$, $\alpha>1-\sigma$ ist.

---

[20]) Vgl. z. B. [15], S. 19—20.

Nimmt man noch im ersten Fall $\alpha < \sigma$, im zweiten aber $\sigma > \frac{1}{2}$ und $\alpha < \frac{1}{2}$ an, wodurch die Bedingungen (I) $0 < \sigma < 1$, $0 < \alpha < \min\{\sigma, 1-\sigma\}$ bzw. (II) $\sigma > \frac{1}{2}$, $s \neq 1, 2, \ldots$, $\max\{0, 1-\sigma\} < \alpha < \frac{1}{2}$ entspringen, so muß nach (4.29) das Integral linker Hand für $|Y| \to \infty$ gegen Null streben, und zwar *inbezug auf N gleichmäßig.*

5° Es seien u mit $0 < u < 1$ und s, α mit (I) oder (II) festgelegt.

Da wir in 1° die Konvergenz und Summe von $\underset{x<\alpha}{\mathfrak{S}} u^{-z}\mathfrak{F}(s, z)$ schon ermittelt haben (vgl. (4.7)), schreiben wir nun (4.8) in der Form

$$\underset{x<\alpha}{\mathfrak{S}} u^{-z}\mathfrak{F}(s, z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iY_1}^{\alpha+iY_2} u^{-z}\mathfrak{F}(s, z)\,dz = \sum_{k=N+1}^{\infty}\binom{s-1}{k}\zeta(1-s+k)u^k +$$

$$\tag{4.30} + \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\alpha+iY_2}^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iY_2} + \int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iY_2}^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)-iY_1} + \int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)-iY_1}^{\alpha-iY_1}\right) u^{-z}\mathfrak{F}(s, z)\,dz,$$

wobei Y_1, Y_2 und N hinreichend groß zu denken sind (vgl.[17]), ferner $\underset{x<\alpha}{\mathfrak{S}}$ nach (4.7) für (I) $\zeta(1-s, u) - u^{s-1}$, für II einfach $\zeta(1-s, u)$ bedeutet. Wir wollen in den folgenden Zeilen auf die Bezeichnung des Integranden $u^{-z}\mathfrak{F}(s, z)$ verzichten.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgeschrieben.

Vermöge (4.29) lassen sich die Parameter Y_1 und Y_2 derart bestimmen, daß die Ungleichungen

$$\tag{4.31} \left|\int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iY_2}^{\alpha+iY_2}\right| \text{ und } \left|\int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)-iY_1}^{\alpha-iY_1}\right| < \frac{\pi}{2}\varepsilon \qquad (Y_1, Y_2 > K_0, N = 1, 2, \ldots)$$

gültig sind.

Halten wir ein solches Wertepaar Y_1, Y_2 fest so kann N (vgl. (4.6), (4.16)) gewiß so groß gewählt werden, daß

$$\tag{4.32} \left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\binom{s-1}{k}\zeta(1-s+k)\,u^k\right| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (N > N_1),$$

ferner

$$(4.33)\qquad \left|\int\limits_{-(N+\frac{1}{2})-iY_1}^{-(N+\frac{1}{2})+iY_2}\right| < \frac{\pi}{2}\varepsilon \qquad (N > N_1)$$

ausfällt.

(4.30)—(4.33) implizieren aber

$$(4.34)\qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-iY_1}^{a+iY_2} - \sum_{x<a}\right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}+\frac{\pi\varepsilon}{2}+\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon \qquad (Y_1, Y_2 > K_{10}),$$

also die Konvergenz von $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}$ und (4.1) bzw. (4.2), w. z. b. w.

5. Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{M}(s, z)$ in solcher Form geschrieben werden kann, welche gewisse Vorteile gegenüber ihrem ursprünglichen Ausdruck bietet, ferner uns zu Orthogonalitätseigenschaften von $\zeta(s, u)$ $(0 < u \leqq 1)$ führt. Genauer:

Satz 3. *Es besteht*

$$(5.1)\qquad \int\limits_0^1 \zeta(s, u)\, du = 0 \qquad (\sigma > 1),$$

und das linksseitige Integral ist für $\sigma \leqq 0$ eigentlich, für $0 < \sigma < 1$ uneigentlich, aber absolut konvergent.

Für $\max\{0, \sigma\} + \max\{0, x\} < 1$ (*) *ist ein Produkt $\zeta(s, u)\zeta(z, u)$ im Intervall $0 < u < 1$ absolut integrierbar*[21]) *und es gilt die Formel:*

$$(5.2)\qquad \int\limits_0^1 \zeta(s, u)\,\zeta(z, u)\, du = (2\pi)^{s+z-2}\,\Gamma(1-s)\,\Gamma(1-z)\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\,\zeta(2-s-z);$$

insbesondere

$$(5.3)\qquad \int\limits_0^1 \zeta(s, u)\,\zeta(z, u)\, du = \begin{cases} \mathfrak{M}(s, 1-z), & \textit{wenn } x > 0,\ x + \max\{0, \sigma\} < 1, \\ \mathfrak{M}(z, 1-s), & \textit{wenn } \sigma > 0,\ \sigma + \max\{0, x\} < 1, \end{cases}$$

---

[21]) Es erscheint wahrscheinlich, daß $\int\limits_0^1 \zeta(s, u)\,\zeta(z, u)\, du$ im Fall $\max\{0, \sigma\} + \max\{0, x\} \geqq 1$ als ein Riemann—Cauchysches Integral nicht existiert, so daß es dann auch von Orthogonalitätsrelationen der Art (5.5) keine Rede sein kann.

ferner

(5.4)
$$\|\zeta(s,u)\|^2 = \int_0^1 |\zeta(s,u)|^2 du = 2(2\pi)^{2(\sigma-1)} \operatorname{ch} \pi\tau \cdot |\Gamma(1-s)|^2 \zeta(2-2\sigma) \quad \left(\sigma < \frac{1}{2}\right).$$

Nebst (*) hat man dann und nur dann die Orthogonalitätsrelation

(5.5)
$$(\zeta(s,u),\ \zeta(z,u)) = \int_0^1 \zeta(s,u)\,\zeta(\bar{z},u)\,du = 0,$$

wenn s und $\bar{z}$ sich um eine ungerade (ganze) Zahl unterscheiden.

Beweis. 1° Nach dem Lemma ist $|\zeta(s,u)|$ für $\sigma \leqq 0$ im Intervall $0 \leqq u \leqq 1$ beschränkt und integrierbar, während wir für $0 < \sigma < 1$ die Abschätzung $|\zeta(s,u)| < Cu^{-\sigma}$ $(C > 0, 0 < u \leqq 1)$ haben; wegen der absoluten Integrierbarkeit von $\zeta(s,u)$ liefert (3.6) die gewöhnliche Fourierentwicklung dieser Funktion in $0 < u < 1$, woher (5.1) durch eine (jedenfalls erlaubte) gliedweise Integration unmittelbar folgt.

2° Es sei $\max\{0, \sigma\} + \max\{0, x\} < 1$ angenommen; dann sind vier Fälle möglich: 1) $\sigma \leqq 0$, $x \leqq 0$; 2) $\sigma \leqq 0$, $0 < x < 1$; 3) $x \leqq 0$, $0 < \sigma < 1$; 4) $x > 0$, $\sigma > 0$, $x + \sigma < 1$. Wie aus dem Lemma erhellt, ist $|\zeta(s,u)|\,|\zeta(z,u)|$ in $0 < u \leqq 1$ allerdings eine stetige Funktion von u; bei $u \to +0$ bleibt sie im Fall 1) beschränkt, sonst mag sie unendlich werden und zwar, der Reihe nach, höchstens wie u^{-x}, $u^{-\sigma}$, $u^{-(\sigma+x)}$. Wegen $\sigma + x < 1$ ist also die Existenz von $\int_0^1 |\zeta(s,u)|\,|\zeta(z,u)|\,du$ gesichert.

Liegt 1) vor, so sind auch $|\zeta(s,u)|^2$ und $|\zeta(z,u)|^2$ in $0 < u \leqq 1$ integrierbar und es kann die Parsevalsche Formel für nach 1 periodische Funktionen angewendet werden.[22]) Man erhält durch (3.6)

(5.6)
$$\int_0^1 \zeta(s,u)\,\zeta(z,u)\,du =$$
$$= 2\Gamma(1-s)\,\Gamma(1-z)\,(2\pi)^{s+z-2} \sum_{m=1}^{\infty} m^{s+z-2}\left(\sin\frac{\pi s}{2}\sin\frac{\pi z}{2} + \cos\frac{\pi s}{2}\cos\frac{\pi z}{2}\right) =$$
$$= 2(2\pi)^{s+z-2}\,\Gamma(1-s)\,\Gamma(1-z)\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\,\zeta(2-s-z),$$

also (5.2).

Wir betrachten nun 2) und 4) zusammen, indem wir die Gültigkeit der Bedingungen $x > 0$, $x + \max\{0, \sigma\} < 1$ voraussetzen. Dann ist die Mellin-

[22]) Es wäre in sonstigen Fällen die Benützung des Theorems von Parseval—Hurwitz mit überflüssigen Einschränkungen verbunden.

Transformierte $\mathfrak{M}(s,1-z)=\int\limits_0^\infty u^{-z}\bar{\zeta}(s,u)\,du$ nach Satz 1 gewiß vorhanden; die Verwendung von (2.1) ergibt

$$\int\limits_0^1 \zeta(s,u)\,\zeta(z,u)du+\int\limits_0^1\zeta(s,u)\left\{z\int\limits_N^\infty \bar{t}(t+u)^{-z-1}dt+\frac{1}{1-z}(u+N)^{1-z}\right\}du=$$

$$(5.7)\qquad =\int\limits_0^1\zeta(s,u)\left(\sum_{n=0}^{N}(u+n)^{-z}\right)du=\sum_{n=0}^{N}\int\limits_n^{n+1}\zeta(s,u-n)\,u^{-z}du=$$

$$=\int\limits_0^{N+1}u^{-z}\,\zeta(s,\bar{u})\,du\qquad (N=0,1,2,\ldots).$$

Da unsere Einschränkungen für s und z die Ungleichung $\sigma<1$ implizieren, so existiert die Stammfunktion

$$Z(s,u)=\int\limits_0^u\zeta(s,v)\,dv\qquad (0\leqq u\leqq 1)$$

und stellt eine stetige Funktion von u mit

$$(5.8)\qquad Z(s,0)=Z(s,1)=0$$

dar (vgl. (5.1)); auf Grund von (5.8) entspringt durch Teilintegration

$$(5.9)\qquad \begin{aligned}&\int\limits_0^1\zeta(s,u)\left\{z\int\limits_N^\infty\bar{t}(t+u)^{-(z+1)}dt+\frac{(u+N)^{1-z}}{1-z}\right\}du=\\ &=\int\limits_0^1 Z(s,u)\left\{z(z+1)\int\limits_N^\infty\bar{t}(u+t)^{-z-2}\,dt-(u+N)^{-z}\right\}du.\end{aligned}$$

Daß man dabei unter dem Integralzeichen nach u differenzieren durfte, weist man wegen $\left|\int\limits_n^{n+1}\bar{t}(u+t)^{-z-2}\,dt\right|\leqq\int\limits_n^{n+1}t^{-x-1}\,dt=\frac{1}{x}\{n^{-x}-(n+1)^{-x}\}$ $(0\leqq u\leqq 1;\,n=1,2,\ldots)$ leicht nach.

Aus (5.7) und (5.9) entnimmt man die Abschätzung

$$\left|\int\limits_0^1\zeta(s,u)\,\zeta(z,u)du-\mathfrak{M}(s,1-z)\right|\leqq\left|\int\limits_{N+1}^\infty u^{-z}\,\zeta(s,\bar{u})\,du\right|+$$

$$+N^{-x}\left(\frac{|z|\,|z+1|}{x+1}+\int\limits_0^1|Z(s,u)|\,du\right)\qquad (N=1,2,\ldots);$$

läßt man $N \to \infty$ streben, so folgt

$$\int_0^1 \zeta(s, u)\,\overline{\zeta(z, u)}\,du = \mathfrak{M}(s, 1-z). \tag{5.10}$$

Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß die (3) und 4) entsprechende) andere Hälfte von (5.3) einfach durch Vertauschung von s und z bzw. von σ und x gewonnen werden kann. (5.6), (5.10) und Satz 1 liefern hiemit (5.2) für jeden fall 1)—4); (5.4) ergibt sich daraus für $z = \bar{s}$ unter Beachtung der Tatsache, daß $\Gamma(s)$ und $\zeta(s, u)$ $(0 < u \leqq 1)$ in konjugierten Punkten konjugierte Werte annehmen.

3° Um (5.5) zu erledigen, fassen wir die Darstellung

$$(\zeta(s, u), \zeta(z, u)) = 2(2\pi)^{s+\bar{z}-2}\,\Gamma(1-s)\,\Gamma(1-\bar{z})\cos\frac{\pi}{2}(s-\bar{z})\,\zeta(2-s-\bar{z}) \tag{5.11}$$

ins Auge. Hierin sind $(2\pi)^{s-\bar{z}-2} = e^{(s+\bar{z}-2)\log(2\pi)}$, $\Gamma(1-s)$, $\Gamma(1-\bar{z})$ jedenfalls, $\zeta(2-s-\bar{z})$ aber für $2-(\sigma+x) > 1$, d. h. $\sigma + x < 1$ nullpunktsfrei; da (*) die letzte Bedingung enthält, so kann $(\zeta(s, u), \zeta(z, u))$ nebst (*) dann und nur dann verschwinden, falls $\cos\frac{\pi}{2}(s-\bar{z}) = 0$, d. h. $s-\bar{z} = 2\mu+1$ $(\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ist, w. z. b. w.

6. Wir wollen noch einige Bemerkungen hinzufügen.

Es bieten sich zweierlei Verwendungsmöglichkeiten betreffs (4.1) und (4.2) dar.

Für $u \to 1-0$, $u \to +0$ und $u = \frac{1}{2}$ erhält man wegen $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$ bzw. $\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = (2^s - 1)\,\zeta(s)$ $(s \neq 1)$ solche Beziehungen, durch welche ein Wert von $\zeta(s)$ im kritischen Streifen sich mittels des Wertvorrates dergleichen Funktion auf einer vertikalen Geraden verbinden läßt; es sei gleich die aus (4.1) bei $u = \frac{1}{2}$ entspringende Relation

$$\begin{gathered}\pi^s(1-2^{s-1})\,\Gamma(s)^{-1}\zeta(1-s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \pi^{-z}\,\Gamma(z)\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\,\zeta(s+z)\,dz\\ \left(\sigma > \frac{1}{2};\ s \neq 1, 2, \ldots;\ \max\{0, 1-\sigma\} < \alpha < \frac{1}{2}\right)\end{gathered} \tag{6.1}$$

hervorgehoben. — Man kann (6.1) als eine „Integrofunktionalgleichung" für $\zeta(s)$, ein in gewisser Richtung *erweitertes Gegenstück zur Riemannschen Funk-*

tionalgleichung auffassen.[23]) Setzt man aber für ein festes u einen bekannten Ausdruck von $\zeta(1-s, u)$ ein, so ergeben sich z. B. (vgl. (2.1), (2.5))

$$(6.2)\qquad \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \omega^{-z}\Gamma(z)\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\,\zeta(s+z)\,dz = 2\pi i\sum_{m=1}^{\infty} m^{-s}\cos\left(m\omega-\frac{\pi s}{2}\right)$$

$$\left(\sigma>\frac{1}{2},\ s\neq 1,2,\ldots;\ 0<\omega<2\pi;\ \max\{0,1-\sigma\}<\alpha<\frac{1}{2}\right),$$

$$(6.3)\qquad \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} (2\pi u)^{-z}\Gamma(z)\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\zeta(s+z)\,dz = -\frac{\pi i(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\left\{\frac{1}{s}u^s+\right.$$

$$\left.+(1-s)\int_0^{\infty}\bar{t}(u+t)^{s-2}\,dt\right\}\qquad (0<\sigma<1;\ 0<u<1;\ 0<\alpha<\min\{\sigma,1-\sigma\}),$$

die auch unter Umständen bei der Untersuchung der „Zetawurzeln" mit $0<\sigma+\alpha<1$ nützlich sein können.[24])

Was Satz 3 betrifft, so handelt es sich zugleich um die *Verallgemeinerung* gewisser oft benutzter Eigenschaften der *Bernoullischen Polynome.* (5.1) und (5.2) gehen nämlich für $s=1-\nu$ bzw. $s=1-k$, $z=1-l$ wegen $\zeta(1-\nu,u)=-(\nu-1)!\ B_\nu(u)$ $(\nu=1,2,\ldots)$, $\zeta(2\mu)=(-1)^{\mu-1}B_{2\mu}(2\pi)^{2\mu}/2(2\mu)!$ $(\nu,\mu=1,2,\ldots)$ in die Formeln

$$(6.4)\qquad \int_0^1 B_\nu(u)\,du=0 \qquad (\nu=1,2,\ldots),$$

$$(6.5)\qquad \int_0^1 B_k(u)B_l(u)\,du = 2\cos(k-l)\frac{\pi}{2}\frac{\zeta(k+l)}{(2\pi)^{k+l}} = \begin{cases} 0 \text{ für ungerades } k-l,\\ (-1)^{\frac{1}{2}(k-l)}B_{k+l}/(k+l)! \text{ für gerades } k-l,\end{cases}$$

also in die Orthogonalitätsrelationen dieser Polynome über.[25])

---

[23]) Es sei $\frac{1}{2}<\sigma<1$. Wir bemerken, daß dann in (6.1) linksseitig ein Wert mit $0<\sigma<\frac{1}{2}$ von $\zeta(s)$ steht, rechts aber nur Werte mit $\sigma>1$ dieser Funktion in Betracht kommen, ferner ist (wie man leicht nachweisen kann) der Integrand im genannten Fall gewiß von Null verschieden.

[24]) Vgl. hierzu die von Hardy (*C. R. Paris*, 158 (1914), 1012—1014) benutzte Formel:

$$\Theta(u)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi u}=1+u^{-\frac{1}{2}}+(1/2\pi i)\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\Gamma(s/2)(\pi u)^{-s/2}\zeta(s)\,ds \qquad (u>0)$$

Es sei noch erwähnt, daß ich mich in einer neuestens publizierten Arbeit[26]), an gewisse zahlentheoretische Fragen und an die asymptotischen Ergebnisse über $\int_0^1 |\zeta^*(s, u)|^2 du$ $\left(\sigma \geqq \frac{1}{2}\right)$ von J. F. KOKSMA und C. G. LEKKERKERKER[27]) knüpfend, auch mit Integralen der Form

$$J_{a,b}(s) = \int_0^1 \bar{\zeta}(1-s, au)\,\bar{\zeta}(1-s, bu)\,du \qquad \left(\sigma > \frac{1}{2};\ a, b = 1, 2, \ldots\right)$$

beschäftigt habe; die angegebene Methode gestattet, allgemein

$$\int_0^1 \bar{\zeta}(s, au)\,\bar{\zeta}(z, bu)\,du \quad (\max\{0, \sigma\} + \max\{0, z\} < 1)$$

mit Hilfe der elementaren Funktionen, der Gamma- und Zetafunktion, ferner mittels des größten gemeinsamen Teilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von a und b in geschlossener Form auszuwerten.

Literaturverzeichnis.

[1] G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace-Transformation*, Bd. I (Basel, 1950).

[2] G. H. HARDY—W. W. ROGOSINSKI, *Fourier series* (Cambridge, 1944).

[3] K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, vierte Auflage (Berlin und Heidelberg, 1947).

[4] J. F. KOKSMA und C. G. LEKKERKERKER, A mean-value theorem for $\zeta(s, w)$, *Indagationes Math.*, **14** (1952), S. 446—452.

[5] E. LANDAU, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. II (Leipzig, 1927).

[6] E. LINDELÖF, *Le calcul des résidus et ses applications* (Paris, 1905).

[7] F. LÖSCH und F. SCHOBLIK, *Die Fakultät (Gammafunktion) und verwandte Funktionen* (Leipzig, 1951).

[8] HJ. MELLIN, Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, **24**, No. 10 (1899), 1—50.

[9] HJ. MELLIN, Über einen Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen, *Acta Math.*, **25** (1902), 139—164.

[10] HJ. MELLIN, Abriß einer einheitlichen Theorie der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen, *Math. Annalen*, **68** (1910), 305—337.

---

und etwas kompliziertere Transformationsformeln von RAMANUJAN (*Quarterly Journal of Math.*, **46** (1915) S. 253—260).

[25]) Vgl. z. B. [12], S. 31. Dem dortigen $B_\nu(x)$ entspricht $\nu!\,B_\nu(x)$ nebst unserer Bezeichnung.

[26]) Vgl. [11].

[27]) Vgl. [4].

[11] M. Mikolás, Integral formulae of arithmetical characteristics relating to the zeta-function of Hurwitz, *Publicationes Math. Debrecen.* (Im Erscheinen.)
[12] N. E. Nörlund, *Differenzenrechnung* (Berlin, 1924).
[13] W. Rogosinski, *Fouriersche Reihen* (Berlin—Leipzig, 1930).
[14] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals* (Oxford, 1937).
[15] E. C. Titchmarsh, *The zeta-function of Riemann* (Chambridge, 1944).
[16] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function* (Oxford, 1951).
[17] E. T. Whittaker und G. N. Watson, *A course of modern analysis*, vierte Auflage (Cambridge, 1952).

(Eingegangen am 30. Dezember 1955.)